

# Un nuovo metodo teorico di verifica della resistenza di strutture in vetro

*Maurizio Froli, Manuel Santarsiero*

## 1. Introduzione

Nella Architettura moderna il vetro viene sempre più frequentemente impiegato quale materiale da costruzione per assolvere ruoli strutturali non secondari. Di conseguenza anche per questo materiale è sorta la necessità impellente di sviluppare affidabili metodi di verifica teorica della sicurezza statica che rendano possibile la progettazione e la previsione delle prestazioni meccaniche di strutture in vetro pur nella mancanza attuale di una base di dati sperimentali sufficientemente estesa su strutture in vera grandezza.

La peculiare sensibilità del vetro alle imperfezioni superficiali, l'assenza di plasticità e fenomeni quali quello della cosiddetta "fatica statica" ossia della minore resistenza offerta dal materiale nei confronti di carichi di lunga durata, impediscono l'impiego dei tradizionali metodi di calcolo dimostratisi validi per altri materiali da costruzione. Anche i metodi di verifica standard specificamente destinati alle vetrazioni da finestra non possono essere utilizzati perché sviluppati per far fronte a condizioni di carico di breve durata quali tipicamente le raffiche di vento.

Il primo modello teorico di resistenza del vetro scientificamente consistente e di taglio ingegneristico, detto "Load Duration Theory" (LDT), fu proposto nel 1972 da Brown [5] il quale combinò la teoria della fatica statica di Charles & Hillings [6] con il concetto di probabilità di rottura espresso da Weibull [7].

Evans nel 1974 [8] sviluppò il "Crack Growth Model" (CGM) basandosi su principi della Meccanica Lineare della Frattura. In questo metodo la formulazione empirica della propagazione sub-critica delle fessure, dedotta dal diagramma sperimentale tra velocità di accrescimento e fattore d'intensificazione degli sforzi  $K_I$ , viene impiegata assieme al concetto di probabilità di frattura alla Weibull sotto l'ipotesi che tutte le microfessure presenti in superficie siano sede di accrescimento sub-critico indipendentemente dalla piccolezza del loro fattore  $K_I$ .

Beason e Morgan formularono tra il 1980 ed il 1984 il "Glass Failure Prediction Model" (GFPM) [9] destinato alla verifica di lastre rettangolari appoggiate sui quattro lati. Anche qui la teoria della fatica stati-

ca di Charles & Hillings viene impiegata in associazione alla probabilità di rottura espressa alla Weibull mentre le tensioni vengono calcolate tenendo conto degli effetti non lineari causati dalle grandi inflessioni presenti nelle lastre sottili da finestra. Il GFPM è stato posto alla base della Normativa Canadese CAN/CGSB 12.20-M89 e della ASTM 1300-04.

Fisher-Cripps & Collins [10] dimostrarono però nel 1994 che il GFPM era inadatto alla previsione di fratture nel vetro sia sotto carichi di breve che di lunga durata mentre il CGM, d'altro canto, non era in grado di prevedere rotture sotto carichi di lunga permanenza. Per ovviare a questo inconveniente gli stessi Autori estesero il CGM, denominandolo Modified Crack Growth Model (MCGM), dove viene introdotta la condizione basata sulla evidenza sperimentale secondo la quale non si ha accrescimento della microfessura se il fattore  $K_I$  è inferiore ad un valore limite detto limite di fatica statica.

Tra il 1995 ed il 1999 Sedlacek e alcuni suoi collaboratori misero a punto un metodo ingegneristico di verifica delle strutture in vetro basato sul calcolo delle probabilità di rottura alla Weibull e sulla Meccanica della Frattura [11]. L'espressione di verifica finale alla quale perviene Sedlacek è formalmente analoga a quella già impiegata nelle verifiche a fatica delle strutture metalliche e molto familiare tra i progettisti. Shen [12] e Siebert (2001) [13] proposero a loro volta versioni poco differenti dal metodo di Sedlacek che conducono a risultati tra loro prossimi. Questo approccio è stato posto alla base della attuale versione della prEN 13474-3.

Nel 2001 Porter [17] elabora il Crack Size Design (CSD) nel quale egli definisce una cricca di progetto, ossia di un valore di progetto della dimensione massima dei difetti presenti in una lastra ipotizzando poi cautelativamente che questo difetto sia uniformemente presente su tutta la superficie.

Haldimann (2006) contribuisce al progresso nella soluzione del problema con il suo Lifetime Prediction Model (LPM) nel quale egli evita l'introduzione di grandezze equivalenti calcolando direttamente la probabilità di rottura di un elemento a partire dalla distribuzione della probabilità dei suoi difetti e dalla

conoscenza deterministica della storia di carico alla quale sarà sottoposto [1].

Devigili nello stesso anno [14] rimuove anche la limitazione concettuale legata alla definizione deterministica della storia di carico ipotizzando che le proprietà aleatorie dei microdifetti superficiali e delle storie di carico siano descrivibili attraverso distribuzioni di Markov. I risultati ottenuti appaiono molto rigorosi ma le difficoltà analitiche ne impediscono l'uso a livello di progettazione corrente.

Nella presente memoria si è cercato di formulare un metodo che costituisca un'estensione del LPM pur mantenendo un livello di complessità analitica sufficientemente contenuto per consentirne l'impiego anche nell'ambito della normale attività di progettazione.

## 2. Richiami sul comportamento meccanico del vetro

E' noto che ogni superficie di vetro, anche se apparentemente intatta, è inevitabilmente afflitta da microscopiche fessure distribuite su di essa in modo del tutto aleatorio. Se l'elemento di vetro è sottoposto a sforzi meccanici, all'apice delle microfessure sorgono notevoli concentrazioni di tensione le quali, poiché il materiale è dotato di struttura cristallina amorfa priva di piani preferenziali di scorrimento, non possono essere ridistribuite plasticamente dando luogo alle rotture assolutamente fragili che caratterizzano questo materiale.

La resistenza alla frattura di un materiale può essere descritta razionalmente attraverso i principi della Meccanica della Frattura Lineare Elastica. In particolare Irwin [2] ha introdotto il *fattore d'intensificazione degli sforzi*  $K(t)$  per caratterizzare il comportamento fragile di un elemento dotato di una fessura singola posta in trazione ortogonalmente al suo piano medio (frattura di modo I) che rappresenta la situazione più interessante per il vetro:

$$K(t) = \sigma(t)Y\sqrt{\pi \cdot a(t)} \quad (2-1)$$

Nella precedente sono:

- $Y$  - fattore di correzione che dipende principalmente dalla geometria e dalla dimensione del difetto;
- $\sigma(t)$  - andamento nel tempo della tensione agente in prossimità del difetto, corrispondente al modo di apertura considerato;
- $a(t)$  - andamento nel tempo della profondità della fessura.

Il materiale perverrà a rottura fragile quando la propagazione della fessura raggiungerà la condizione d'instabilità ossia quando:

$$K(t) \geq K_{IC} \quad (2-2)$$

$K_{IC}$  è detto *fattore critico di intensificazione degli sforzi*. Esso dipende in genere solo dal materiale e lo si può considerare tecnicamente costante in virtù della sua bassa dispersione statistica. Sostituendo la (2-2) nella (2-1) si ricavano immediatamente le espressioni di  $a_{cr}$  e  $\sigma_{cr}$ , rappresentanti rispettivamente la profondità della fessura e la intensità della tensione capaci di indurre propagazione instabile della frattura. Questa coppia di valori individua la cosiddetta *resistenza inerte*.

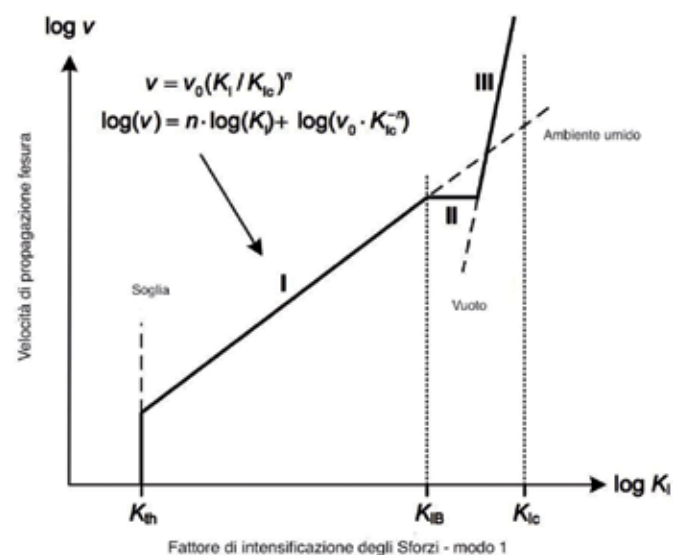


Figura 2-1: Diagramma  $n-K_1$  [3]

Il diagramma di Figura 2-1 riporta, in funzione del fattore  $K$ , la velocità di propagazione della fessura di un elemento soggetto a tensione remota costante e immerso in ambiente umido. Si osserva che anche per  $K < K_{IC}$  si manifesta una lenta crescita subcritica delle fessure superficiali che si approfondiscono nel tempo diminuendo progressivamente la resistenza a trazione apparente del vetro. Questo fenomeno è noto come fatica statica e riveste un ruolo fondamentale nella determinazione della resistenza teorica a rottura di un elemento in vetro.

L'unica parte del diagramma che fornisce un contributo significativo alla vita di progetto di una fessura caratterizzata da un fattore  $K(t)$ , è il tratto I. In un diagramma bi-logaritmico questo tratto della curva  $v-K(t)$ , è circa a pendenza costante e può

quindi essere descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = v_0 \left( \frac{K(t)}{K_{IC}} \right)^n \quad (2-3)$$

Nella quale  $n$  è la pendenza del diagramma nel tratto I e  $v_0$  rappresenta la velocità di propagazione per  $K = K_{IC}$ . Ciascuna delle precedenti grandezze è in generale funzione del grado di umidità, della temperatura, del pH e della intensità delle tensioni.

La previsione teorica della rottura di un elemento in vetro sottoposto a sforzo risulta pertanto assai complessa e fortemente dipendente dai seguenti fattori:

- condizioni ambientali;
- stato di danneggiamento della superficie;
- andamento temporale del campo di sforzi agente sull'elemento;
- geometria dell'elemento;
- presenza di tensioni residue indotte da processi di tempera.

### 3. Metodo probabilistico: *Lifetime Prediction Model*

Come accennato nella introduzione, il modello di previsione teorica attualmente più avanzato del tempo di sopravvivenza di un elemento in vetro [4] è il *Lifetime Prediction Model* formulato da M. Haldimann in [1].

Haldimann assume lecite le seguenti ipotesi:

- la profondità della fessura è una variabile aleatoria;
- l'elemento in esame contiene un gran numero di fessure;
- la vita dell'intero elemento coincide con la vita di un difetto;
- le fessure non si influenzano vicendevolmente;
- diverse posizioni ed orientamenti dei difetti sono dotate della stessa probabilità di accadimento.

Egli dimostra inoltre che il modo di apertura  $I$  delle fessure risulta sufficientemente rappresentativo in termini di danno indotto all'elemento e fornisce infine la seguente espressione generale della probabilità di fallimento che permette di calcolare la probabilità di rottura di un generico elemento di vetro, di geometria qualsiasi, soggetto a crescita sub-critica dei

difetti, assegnato che sia un generico stato di sforzo legato ad una storia di carico variabile nel tempo:

$$P_f(t) = 1 - \exp \left\{ - \frac{2}{A_0 \pi} \int_A \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \max_{r \in [0,1]} \left[ \left( \frac{\sigma(r, \varphi)}{\theta_0} \right)^{n-2} + \frac{1}{U \theta_0^{n-2}} \int_0^r \sigma^n(\bar{r}, \varphi) d\bar{r} \right]^{\frac{1}{n-2}} \right\}^{m_0} dA d\varphi \quad (3-1)$$

In essa sono:

- $A$  = superficie dell'elemento da verificare;
- $\theta_0$  e  $m_0$ , parametri determinabili sperimentalmente [1] che caratterizzano lo stato di danneggiamento superficiale. Sono quindi legati esclusivamente al materiale e non al tipo di carico o al tipo di prova di laboratorio con la quale vengono determinati o alla geometria dell'elemento che si vuole verificare;
- $A_0$  = superficie di riferimento rispetto alla quale sono stati ottenuti  $\theta_0$  e  $m_0$ ;
- $U = \frac{2K_{IC}^2}{[(n-2)v_0 Y^2 \pi]}$  è un'espressione legata ai parametri proprio del materiale, definiti attraverso la *Meccanica della Frattura Lineare Elastica* e il fenomeno della *fatica statica*.

Tale espressione risulta quindi legata, mediante un approccio probabilistico, a parametri che hanno un chiaro significato fisico e non presenta alcuna ipotesi limitativa sulla forma dell'elemento, sul carico applicato, sulla tipologia di vincolo e sulle condizioni superficiali. L'unica limitazione concettuale del LPM consiste nel fatto che la natura dei carichi è ipotizzata di tipo deterministico.

In considerazione dell'attuale grado di avanzamento scientifico del metodo di Haldimann, esso verrà adottato nel seguito come fondamento teorico del metodo qui proposto detto della *Fessura di Progetto* (in lingua inglese *Design Crack Method* (DCM)).

Osservando tuttavia la complessità analitica della (3-1), si deduce che la sua applicazione in ambito progettuale corrente risulta eccessivamente difficoltosa. Per questo motivo lo stesso Haldimann ha suggerito una versione semplificata della (3-1) introducendo una serie di ipotesi semplificative, poste però a favore di sicurezza:

- può essere trascurata l'esistenza di un valore di soglia del fattore di intensificazione degli sforzi  $K_{th}$ ;
- si assume che il campo di tensione sia equi-biassiale  $\sigma_1 = \sigma_2$ ;
- è lecito assumere l'integrale di Brown o del rischio.

Dalla (3-1), dove per il significato di  $\bar{\sigma}$  si rimanda al paragrafo 5.1 ed alle espressioni (5-1) e (5-2), si ottiene quindi l'espressione semplificata della probabilità di fallimento:

$$P_f = 1 - \exp(-k \cdot \bar{\sigma}^{m'}) \quad (3-2)$$

Nella quale risultano:

$$k = \frac{t_0}{U \cdot \vartheta_0^{n-2}} \quad (3-3)$$

$$m' = \frac{n \cdot m_0}{n - 2} \quad (3-4)$$

Fissata poi la probabilità di fallimento come parametro in funzione del quale ricavare la resistenza, si ottiene la seguente disuguaglianza critica di verifica formulata nel piano delle tensioni:

$$\text{Soll.} = \bar{\sigma} \leq [-\ln(1 - P_f)]^{1/m'} \cdot \left( \frac{t_0}{U \cdot \vartheta_0^{n-2}} \right)^{-1/n} = \text{Res. prob.} \quad (3-5)$$

#### 4. Metodo deterministico: via di progetto di singola fessura

La (2-1) e la (2-3) descrivono il comportamento meccanico del vetro nel tempo, con riferimento rispettivamente alla meccanica della frattura lineare elastica e al fenomeno della fatica statica. Se è assegnata una generica storia di tensione  $\sigma(t)$  - uniforme, sulla superficie e di durata  $T$  - ed è nota la dimensione iniziale  $a_i$  della fessura, sostituendo la (2-1) nella (2-3) si ottiene la seguente equazione integro-differenziale a variabili separabili:

$$\int_0^t \sigma^n(\tau) \left[ v_0 \left( \frac{Y\sqrt{\pi}}{K_{IC}} \right)^n \right] d\tau = \int_{a_i}^{a_f} a^{-\frac{n}{2}} da \quad (4-1)$$

Da questa, assunti in accordo con Haldimann [1]  $n$  e  $v_0$  costanti nel tempo, integrando tra l'istante  $t = 0$  e l'istante generico  $t$  e tra la fessura iniziale  $a_i$  e la fessura  $a_f$  all'istante  $t$ , si ottiene l'espressione

che descrive l'andamento della fessura al generico istante  $t$  in funzione della storia di carico:

$$a_f = a(t) = \left[ a_i^{\frac{2-n}{2}} + \frac{2-n}{2 \cdot K_{IC}^n} v_0 (Y\sqrt{\pi})^n \cdot \int_0^t \sigma^n(\tau) d\tau \right]^{\frac{2}{2-n}} \quad (4-2)$$

La (4-2) può essere espressa nella seguente forma:

$$\int_0^t \sigma^n(\tau) d\tau = \frac{2 \cdot K_{IC}^n}{(n-2)v_0(Y\sqrt{\pi})^n a_i^{\frac{n-2}{2}}} \left[ 1 - \left( \frac{a_i}{a(t)} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right] \quad (4-3)$$

Rielaborando la (4-3) e tenendo conto della (2-2) si ottiene che, affinché non si abbia rottura al tempo  $T$ , deve essere rispettata la seguente disuguaglianza:

$$\int_0^T \sigma^n(t) dt \leq \frac{2 \cdot K_{IC}^n}{(n-2)v_0(Y\sqrt{\pi})^n a_i^{\frac{n-2}{2}}} \left[ 1 - \left( \frac{a_i}{\left( \frac{K_{IC}}{\sigma(t)Y\sqrt{\pi}} \right)^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right] \quad (4-4)$$

Infine, se si ritiene lecito assumere  $a_i \ll a_{cr}$ , come dimostrato da Haldimann [3] per normali tempi di applicazione del carico, il termine in parentesi quadra tende ad 1 ed è quindi possibile separare le variabili arrivando alla seguente disuguaglianza critica nella quale il danneggiamento esterno (sollecitante) viene posto a confronto con il massimo danno accumulabile dal vetro:

$$D_{\text{anno Solle.}}(\sigma, t) \leq D_{\text{anno Max. Accumulabile}}(K_{IC}, n, v_0, Y, a_i) \quad (4-5)$$

In particolare, esplicitando ora i termini della (4-5) si ottiene

$$\int_0^T \sigma^n(t) dt \leq \frac{2K_{IC}^n}{(n-2)v_0(Y\sqrt{\pi})^n} a_i^{\frac{2-n}{2}} \quad (4-6)$$

Il primo membro della (4-6) è noto come integrale di Brown. Quindi, nota la storia di carico di durata  $T$  e scegliendo in modo arbitrario  $t_0$ , si definisce

mediante il succitato integrale di Brown la tensione equidannosa costante di durata  $t_0$ :

$$\sigma_{t_0} = \left[ \frac{1}{t_0} \int_0^T \sigma^n(t) dt \right]^{\frac{1}{n}} \quad (4-7)$$

E' possibile adesso trasformare la (4-6) in una disuguaglianza critica espressa nel più consueto piano delle tensioni anziché nel piano dei danni:

$$\text{Soll.} = \sigma_{t_0} \leq \left[ \frac{1}{t_0} \frac{2K_{IC}^n}{(n-2) \cdot v_0 \cdot (Y\sqrt{\pi})^n} a_i^{\frac{2-n}{2}} \right]^{\frac{1}{n}} = \text{Res. det.} \quad (4-8)$$

## 5. Metodo della Fessura di Progetto (Design Crack Method – DCM)

### 5.1 Concezione del metodo

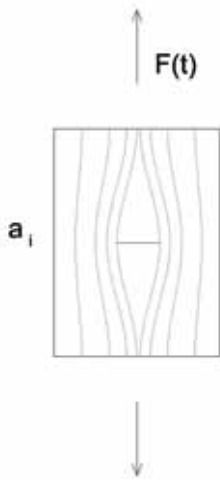


Figura 5-1: Concezione del Metodo [4]

Nel paragrafo 4 è stato descritto il modello deterministico che descrive nel tempo il comportamento meccanico di una lastra di vetro ideale, contenente una fessura di ampiezza  $a_i$ , sollecitata da una tensione uniforme  $\sigma(t)$  variabile nel tempo su un intervallo di durata  $T$ .

I vantaggi di questo modello consistono nella semplicità di applicazione e nella affidabilità della soluzione ma per contro esso non consente di mettere in conto l'aleatorietà dei vari fattori che influenzano il problema della resistenza del vetro.

Per ovviare a questo inconveniente, ci si è proposti di definire una "fessura di progetto"  $a_{i,d}$  tale che rappresenti in modo probabilistico lo stato di danneggiamento aleatorio della superficie reale di un

elemento di vetro. In altre parole si vuole individuare le caratteristiche di un difetto teorico discreto inserito in una lastra perfetta capace di indurre lo stesso danno subito da una lastra reale soggetta ad una distribuzione aleatoria di fessure su tutta la sua superficie.

Questo obiettivo è stato perseguito esclusivamente per via analitica, rinunciando a qualsiasi deduzione empirica. Nel seguito  $\sigma_{t_0}(x,y)$  rappresenta la tensione costante di durata  $t_0$  equivalente alla reale storia di tensioni di trazione  $\sigma(t,x,y)$  variabile nel tempo, mentre  $\bar{\sigma}$  rappresenta la tensione sollecitante, uniforme sulla superficie  $A$  e costante nel periodo di durata arbitraria  $t_0$ , equivalente ad una qualsiasi  $\sigma(t,x,y)$  (vedi anche [4]).

In formule :

$$\sigma_{t_0}(x,y) = \left[ \frac{1}{t_0} \int_0^T \sigma^n(t,x,y) dt \right]^{\frac{1}{n}} \approx \left[ \frac{1}{t_0} \sum_{i=1}^k \sigma(x,y)_i^n \cdot \Delta t_i \right]^{\frac{1}{n}} \quad (5-1)$$

$$\bar{\sigma} = \left[ \frac{1}{A_0} \int_A \sigma_{t_0}^{m'}(x,y) dA \right]^{\frac{1}{m'}} \approx \left[ \frac{1}{A_0} \sum_{j=1}^q \sigma_{t_0,j}^{m'} \cdot \Delta A_j \right]^{\frac{1}{m'}} \quad (5-2)$$

Nelle espressioni precedenti  $k$  è il numero d'intervalli di tempo a tensione circa costante e  $q$  è il numero di aree della superficie soggette a tensione circa uniforme, dove ovviamente gli integrali vanno estesi esclusivamente alle superfici tese o decomprese, riferendosi allo stato tensionale al netto delle compressioni di progetto indotte dai processi di tempera e di precompressione esterna.

### 5.2 Formulazione matematica del metodo

Eguagliamo le resistenze espresse dai secondi membri della (3-5) e della (4-8).

In forma simbolica:

$$R_{det}(v_0, n, Y, K_{IC}, t_0, a_{i,d}) = R_{probabilistica}(P_f, \vartheta_0, m_0, n, v_0, Y, K_{IC})$$

In forma esplicita si ottiene la seguente equazione :

$$\left[ \frac{1}{t_0} \frac{2 \cdot K_{IC}^n}{(n-2) \cdot v_0 \cdot (Y\sqrt{\pi})^n} a_{i,d}^{\frac{2-n}{2}} \right]^{\frac{1}{n}} = [-\ln(1-P_f)]^{\frac{1}{m'}} \cdot \left( \frac{1}{t_0} \frac{2 \cdot K_{IC}^2}{[(n-2) \cdot v_0 Y^2 \pi]} \vartheta_0^{(n-2)} \right)^{\frac{1}{m'}} \quad (5-4)$$

Come si vede, il parametro  $t_0$  può essere eliminato e quindi, operate alcune semplificazioni, si ricava

l'espressione della *fessura di progetto*  $a_{i,d}$ , indipendente dal tempo  $t_0$ :

$$a_{i,d} = \left[ \left( \frac{K_{IC}}{Y\vartheta_0} \right)^2 \frac{(-\ln(1-P_f))^{-2/m_0}}{\pi} \right] = a_{i,d}(P_f, \vartheta_0, m_0) \tag{5-5}$$

Sostituendo l'espressione appena trovata nella (4-5) si ottiene dapprima una disuguaglianza critica nel piano dei danni:

$$D_{anno\ Soll}(t, \sigma) \leq D_{anno\ Max. Accumulabile}(a_{i,d}) \tag{5-6}$$

Quindi, attraverso alcune rielaborazioni, la (5-6) viene trasferita nel piano delle tensioni sotto forma di disuguaglianza critica finale di verifica:

$$Soll. = \bar{\sigma} \leq \left[ \frac{1}{t_0} \frac{2K_{IC}^n}{(n-2) \cdot v_0 \cdot (Y\sqrt{\pi})^n} a_{i,d}(P_f, \vartheta_0, m_0)^{\frac{2-n}{2}} \right]^{\frac{1}{n}} = Res. \text{ Semi-Prob.} \tag{5-7}$$

La (5-7) è stata in definitiva ottenuta sostituendo all'interno di una disuguaglianza deterministica espressa dalla (4-8) un parametro probabilistico espresso dalla (5-5), dove  $t_0$  è scelto in modo arbi-

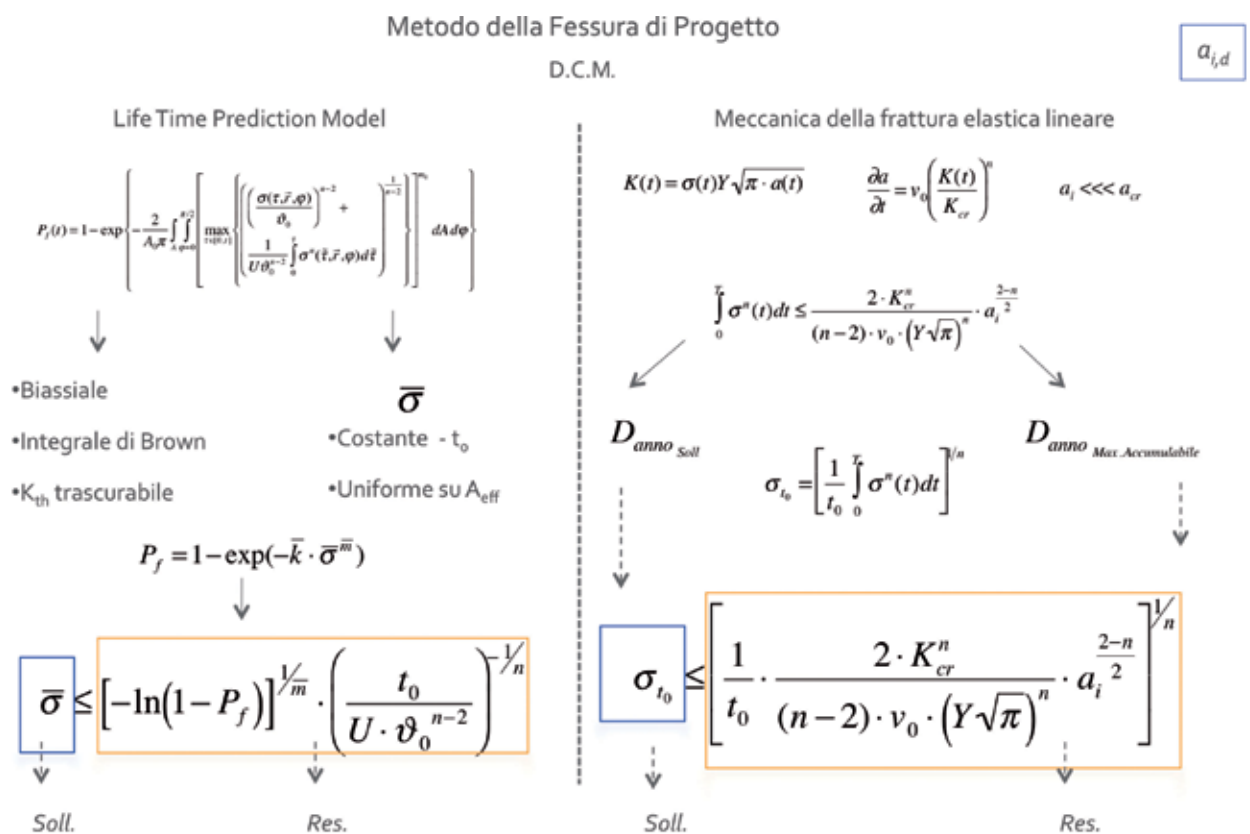
trario e dove  $K_{IC}$ ,  $n$ ,  $Y$ , poiché caratterizzati da una bassa dispersione statistica [3], possono essere tecnicamente ritenuti costanti. Anche prescindendo da queste considerazioni è stato comunque dimostrato in [4] che al variare di tali parametri non si riscontrano sensibili variazioni della soluzione che manifesta comunque un comportamento stabile.

La metodologia con la quale è stata ricavata la (5-7) ricalca i principi base definiti dagli Eurocodici nell'ambito dei metodi di verifica di livello 1, nei quali l'aspetto probabilistico è introdotto dai cosiddetti *coefficienti parziali di sicurezza*  $\gamma$ . Tali valori, così come la succitata *fessura di progetto*, sono definiti ed ottenuti statisticamente in funzione delle caratteristiche del materiale e dei livelli di sicurezza che si vogliono garantire ( $P_f$ ).

In questa sede gli aspetti legati alle caratteristiche del materiale sono rappresentati dai parametri  $\vartheta_0$  e  $m_0$  ricavati da Haldimann [1] analizzando statisticamente, tramite il L.P.M., un ingente numero di prove a rottura di elementi al variare di diversi fattori quali la geometria, le condizioni ambientali e la velocità di applicazione del carico.

Per questo motivo si ritiene che i valori di  $\vartheta_0$  e  $m_0$  ottenuti da Haldimann siano attualmente caratterizzati da una elevata affidabilità.

Il processo logico seguito nell'elaborazione del metodo della *Fessura di progetto*, basato sull'accoppiamento del metodo di Haldimann semplificato con il metodo deterministico della vita di progetto di una singola fessura, può essere sintetizzato dal seguente schema:



$a_{i,d}$

$$R_{det}(v_0, n, Y, K_{cr}, t_0, a_i) = R_{probabil}(P_f, \vartheta_0, m_0, n, v_0, Y, K_{cr})$$


---

$$a_i = \left[ \left( \frac{K_{cr}}{Y \vartheta_0} \right)^2 \cdot \frac{(-\ln(1 - P_f))^{-2/m_0}}{\pi} \right]$$

$$a_{i,d} = a_{i,d}(P_f, \vartheta_0, m_0)$$

$$D_{anno_{sed}}(t, Q) \leq D_{anno_{Max Accumulabile}}(a_i)$$

$$S(t, Q) \leftarrow \sigma_n \leq \left[ \frac{1}{t_0} \cdot \frac{2 \cdot K_{cr}^n}{(n-2) \cdot v_0 \cdot (Y \sqrt{\pi})^n} \cdot a_i(P_f, \vartheta_0, m_0)^{\frac{2-n}{2}} \right]^{\frac{1}{n}} \rightarrow R(P_f, \text{materiale})$$

Figura 5-2: Formulazione della Fessura di Progetto [4]

## 6. Esempi numerici

### 6.1 Metodi esistenti

#### 6.1.1 Confronto

Nel presente paragrafo si illustrano i risultati di un confronto numerico eseguito sui modelli di verifica della resistenza del vetro attualmente disponibili conseguito attraverso un'analisi dello stato dell'arte disponibile in [4].

I vari modelli di calcolo forniscono risultati disomogenei tra loro perché alcuni autori forniscono come *output* la probabilità di fallimento, altri il carico uniforme ultimo, altri la tensione massima ed altri ancora si riconducono ad una prova di laboratorio standard equivalente.

Per rendere possibile il confronto i vari metodi di calcolo sono stati rielaborati [4] in modo da fornire

grandezze tra loro confrontabili. Sono state eseguiti due tipi di rielaborazione: la prima in modo tale che ogni metodo fornisca la probabilità di fallimento a parità di sollecitazione: la seconda in modo tale da fornire la tensione costante che porta a rottura l'elemento, a parità di probabilità di fallimento.

I confronti numerici sono stati compiuti su una piastra quadrata di area pari ad 1m<sup>2</sup> e spessore 4mm uniformemente caricata semplicemente appoggiata lungo i bordi, sottoposta a due diverse storie di carico: una di breve durata (60s) ed una di lunga durata (50anni). La scelta di due storie di carico di durate molto differenti tra loro scaturisce dalle osservazioni già esposte nel capitolo 2 a proposito della *fatica statica*. I valori di tensione massima e probabilità di crisi cui fare riferimento nel confronto sono riassunti nella Tabella 6-1.

	Breve periodo (60s)	Lungo periodo (50 anni)
$\sigma_{max}$	20,3 MPa	8,12MPa
$P_f$	$8 \times 10^{-3}$	$8 \times 10^{-3}$

Tabella 6-1 : Valori di riferimento [4]

Infine, viste le incertezze in gioco, si è ritenuto opportuno istituire i confronti sulla base dell'andamento della  $P_f$  al variare della tensione e viceversa piuttosto che sui soli valori puntuali della tensione

forniti da ciascun metodo. Sulle curve di confronto i vari metodi sono stati contrassegnati dai rispettivi numeri indicati in tabella. I valori in grassetto sono quelli in linea con i valori di riferimento.

#### 6.1.1.1 $P_f$ - Breve durata

Input	Breve durata
$\sigma_{to}$	20,3 MPa
$t_0$	60 s
UR	100%
T	25 °C
$S_v$	5
$n_v$	16

	Modello	$P_f$
1	<b>L.D.T.</b>	<b><math>6,092 \times 10^{-3}</math></b>
2	<b>C.G.M.</b>	<b><math>5,621 \times 10^{-3}</math></b>
3	G.F.P.M.	$2,344 \times 10^{-4}$
4	<b>M.C.G.M.</b>	<b><math>5,621 \times 10^{-3}</math></b>
5	<b>Sed.</b>	<b><math>3,091 \times 10^{-3}</math></b>

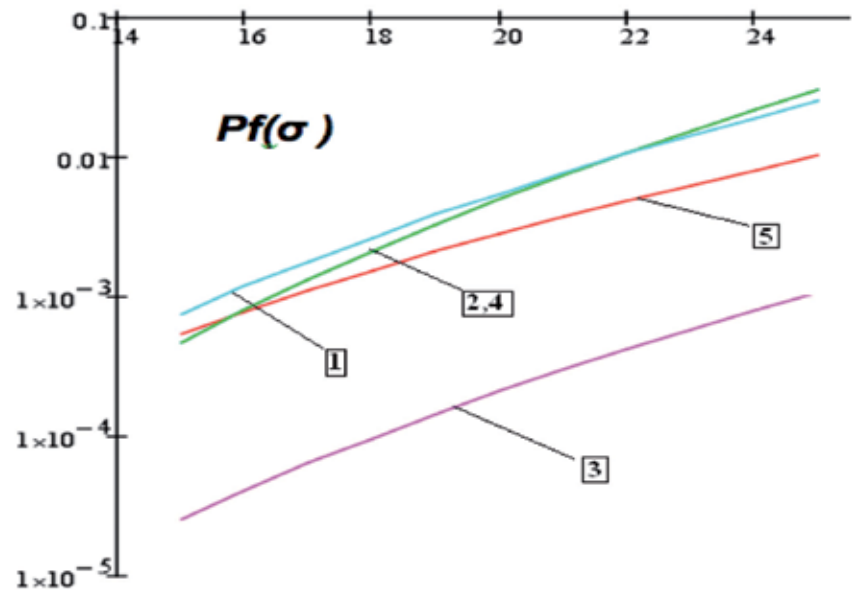


Figura 6-1:  $P_f$  al variare della tensione - Breve durata - [4]

#### 6.1.1.2 $P_f$ - Lunga durata

Input	Lunga durata
$\sigma_{to}$	8,12 MPa
$t_0$	50 anni
UR	50%
T	25 °C
$S_v$	0,45
$n_v$	18,1

	Modello	$P_f$
1	<b>L.D.T.</b>	<b>0,015</b>
2	<b>C.G.M.</b>	<b>0,089</b>
3	G.F.P.M.	$1,060 \times 10^{-3}$
4	<b>M.C.G.M.</b>	<b><math>6,753 \times 10^{-3}</math></b>
5	<b>Sed.</b>	<b><math>7,724 \times 10^{-3}</math></b>

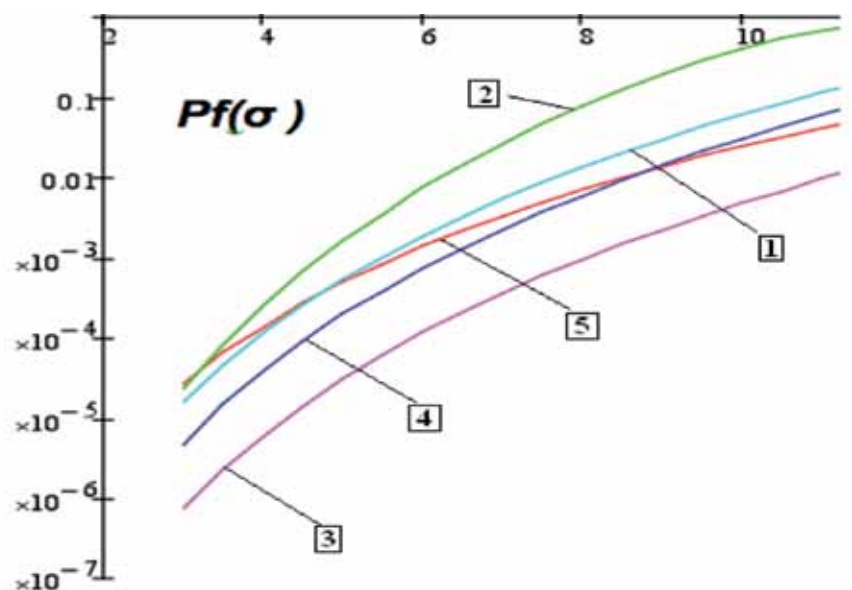


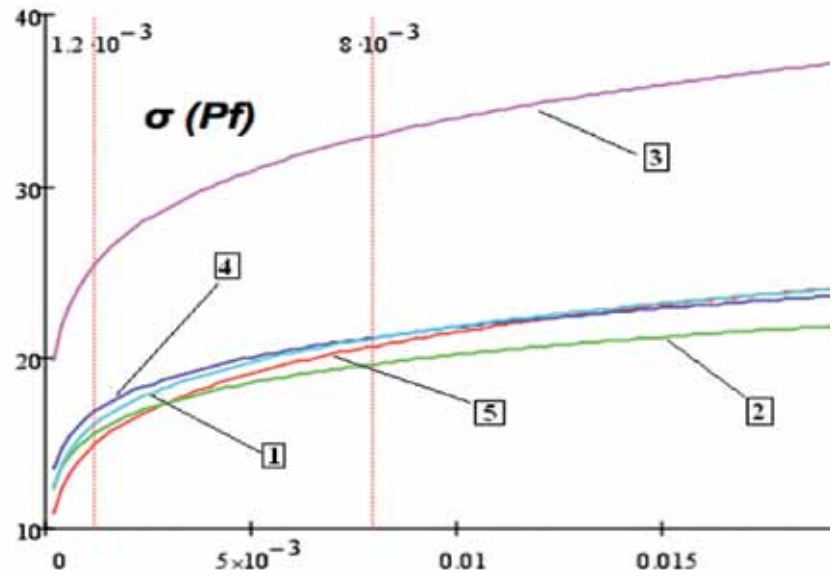
Figura 6-2:  $P_f$  al variare della tensione - Lunga durata - [4]



## 6.1.1.3 Tensione – Breve durata

Input	Breve durata
$P_f$	$8 \times 10^{-3}$
$t_0$	60 s
UR	100%
T	25 °C
$S_v$	5
$n_v$	16

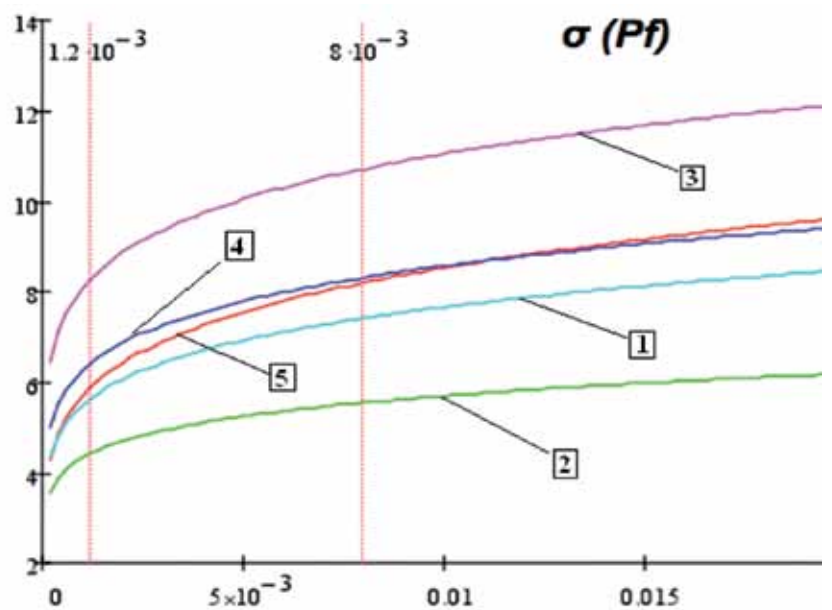
	Modello	$\sigma_{t_0}$ [MPa]
1	L.D.T.	21,119
2	C.G.M.	19,613
3	G.F.P.M.	32,942
4	M.C.G.M.	21,174
5	Sed.	20,664


 Figura 6-3 : Tensione al variare della  $P_f$  - Breve durata [4]

## 6.1.1.4 Tensione – Lunga durata

Input	Lunga durata
$P_f$	$8 \times 10^{-3}$
$t_0$	50 anni
UR	50%
T	25 °C
$S_v$	0.45
$n_v$	18.1

	Modello	$\sigma_{t_0}$
1	L.D.T.	7,413
2	C.G.M.	4,769
3	G.F.P.M.	10,715
4	M.C.G.M.	8,311
5	Sed.	8,198


 Figura 6-4 : Tensione al variare della  $P_f$  - Lunga durata - [4]

### 6.1.2 Osservazioni

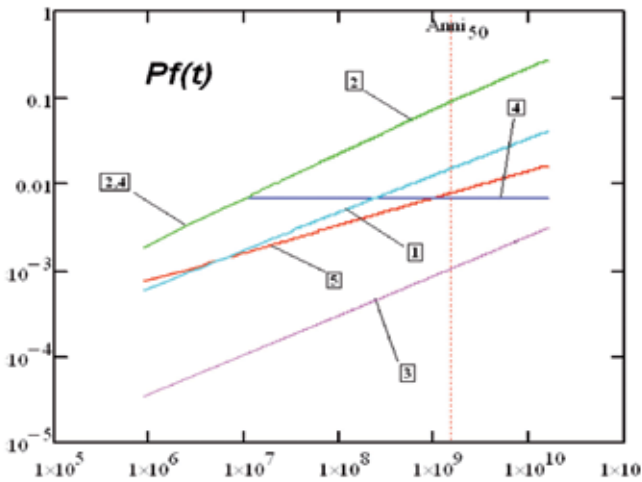


Figura 6-5: Andamento della  $P_f$  nel tempo con tensione costante [4]

In merito ai risultati ottenuti possono essere tratte numerose osservazioni. Le più rilevanti sono le seguenti:

- Nel formulare il L.D.T Brown dichiara che il suo metodo di calcolo può essere applicato solo per carichi di breve durata. Tale assunzione viene confermata dai risultati numerici. Anche il C.G.M fornisce risultati in linea con i valori di riferimento ma solo per brevi applicazioni del carico. E' proprio per questa ragione che è stato proposto un metodo modificato, il M.C.G.M. Quest'ultimo mostra un andamento dei risultati in termini di  $P_f$  nel tempo, che può essere schematizzato in un piano bi-logaritmico da una bilatera come illustrato nella Figura 6-5.
- Dopo un certo istante che dipende dal campo di sforzi agente, il ramo della curva C.G.M viene interrotto e sostituito con uno a pendenza pressoché nulla lungo il quale non si hanno incrementi della probabilità di rottura. Grazie a tale modifica anche

per lunghi tempi di applicazione del carico la parte terminale della bilatera ricade su intervalli di  $P_f$  intorno ad  $10^{-3}$  piuttosto che  $10^{-1}$ .

- Dai risultati numerici si evince che il G.F.P.M non fornisce risultati cautelativi sia per brevi che lunghe applicazioni del carico. Tale criterio di verifica è stato comunque adottato da alcune normative come ad esempio quella canadese (CAN 12-20). Quest'ultima tuttavia contiene degli errori in alcune formule che riportano i risultati in linea con i valori di riferimento.
- Il modello di calcolo proposto da Sedlacek fornisce risultati in linea con i valori di riferimento per brevi e lunghe applicazioni del carico. La verifica viene compiuta trasformando una generica situazione di esercizio in una prova di laboratorio standard *doppio anello* [15, 16] equivalente, mediante dei coefficienti di cui se ne assume implicitamente la conoscenza e l'affidabilità [11].

- Per alcuni metodi non è sufficientemente chiaro quale sia la superficie  $A$  da inserire nelle formule. Si sottolinea che le sole fessure soggette ad un campo di tensioni di trazione producono incrementi della probabilità di crisi.

### 6.2 Metodo della Fessura di Progetto (D.C.M.)

Adottando le medesime condizioni di vincolo, di geometria ed ambientali del paragrafo 6.1 sono state compiute delle semplici applicazioni numeriche del metodo proposto, di cui si riassumono i risultati nella Tabella 6-2. E' stata inoltre compiuta nell'esempio n°3 una simulazione della prova doppio anello ed è stata valutata nell'esempio n°4 la convergenza del metodo alla resistenza inerte  $\sigma_{cr}$  e  $\sigma_{cr}$  risolvendo numericamente la disuguaglianza critica definita dall'espressione (4-4) piuttosto che dalla (4-6) dove solo in quest'ultima il termine relativo al campo di sforzi sollecitante è direttamente esplicitabile.

$n^\circ$	Esempio numerico	Metodo della fessura di progetto	Valori di riferimento
1.1	$\sigma_{\max} - 60 \text{ s}$	21,76 MPa	20,3 MPa
1.2	$\sigma_{\max} - 50 \text{ anni}$	8,27 MPa	8,12 MPa
2.1	$P_f - 60 \text{ s}$	$4,122 \times 10^{-3}$	$8 \times 10^{-3}$
2.2	$P_f - 50 \text{ anni}$	$6,734 \times 10^{-3}$	$8 \times 10^{-3}$
3	$\sigma_{\text{bb},A0}$	42,24 MPa	45 MPa
4	$\sigma_{\max} - 10^{10} \approx 0 \text{ s}$	34,68 MPa	$\sigma_{\text{inerte}} = 34,68 \text{ MPa}$

Tabella 6-2 - D.C.M - Esempi numerici - [4]

### 7. Stabilità della soluzione

Geometria e condizioni di vincolo come definite nel paragrafo 6. Durata del carico 60 s. I valori di  $K_{IC}$ ,  $n$  e  $Y$ , come descritto nel paragrafo 5.2, possono

assumersi in fase di progettazione e di verifica tecnicamente costanti [3]. I seguenti grafici mostrano quindi l'andamento della soluzione al variare dei restanti parametri.

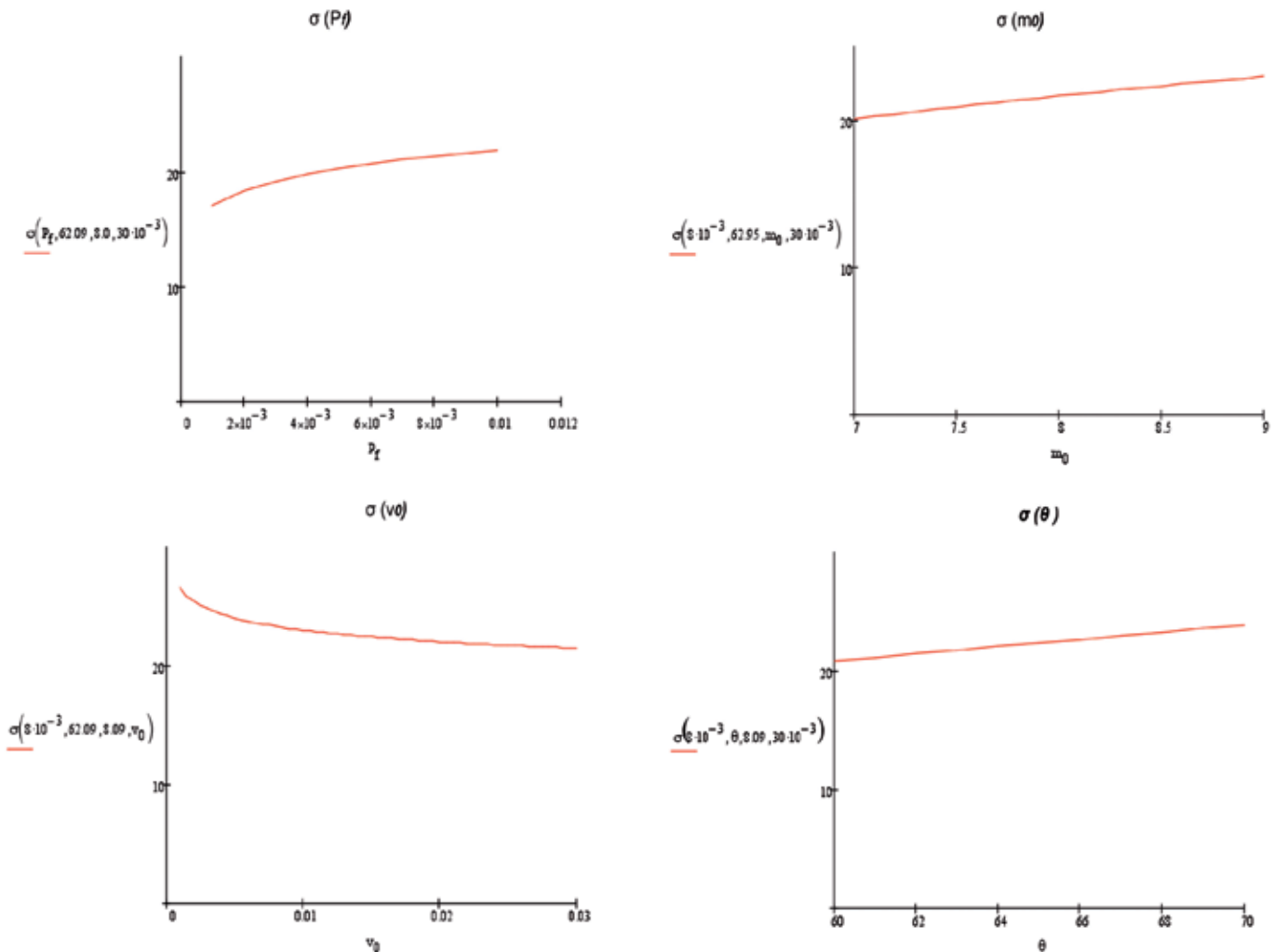


Figura 7-1: Andamento della soluzione [4]

### 8. Conclusioni

Come descritto nel capitolo 1, l'odierno panorama dei criteri di verifica della sicurezza delle strutture in vetro risulta tutt'altro che semplice ed omogeneo. Si è riscontrato che nonostante sia ampia la molteplicità di modelli di calcolo esistenti, nessuno di essi venga privilegiato da parte degli esperti del settore. Questo è dovuto al fatto che alcuni metodi sono utilizzabili esclusivamente per semplici geometrie e vincoli standard, altri pur essendo applicabili a qualsiasi elemento sono limitati da una forte complessità delle equazioni risolutive, altri ancora si sono rivelati del tutto inadeguati giacché forniscono risultati non cautelativi. Di conseguenza ancora oggi il progettista responsabile è costretto ad intraprendere di-

spendiose campagne sperimentali ogni volta che si trovi ad affrontare la progettazione di elementi in vetro caratterizzati da una considerevole importanza strutturale ed economica.

Con la presente memoria si è cercato di fornire uno strumento di facile utilizzo in grado di supportare gli ingegneri durante la progettazione di strutture in vetro, conservando la validità propria di quei metodi, detti *rigorosi*, che sono tuttavia penalizzati da un eccessivo onere computazionale. Tale obiettivo è stato perseguito attraverso l'adozione di un modello deterministico, affidabile e di semplice utilizzo con il quale si è giunti, grazie al modello rigoroso *semplificato* di *Haldimann*, alla definizione di una grandezza ( $a_{i,d}$ ) che esprime la resistenza in modo indipendente dal tempo, tenendo conto statistica-

mente delle caratteristiche del materiale e del grado di sicurezza che si vuole garantire, basandosi su delle considerazioni matematiche e probabilistiche piuttosto che su dei valori empirici di  $a_{i,d}$  opportunamente calibrati.

E' importante sottolineare che obiettivo del metodo proposto non è tanto ottenere una soluzione rigorosa del problema complesso della resistenza del vetro, esistendo al riguardo metodi come quello di Haldimann o di Devigili, ma piuttosto cogliere l'ordine di grandezza del fenomeno tenendo conto in maniera corretta dei principali fattori che governano la resistenza meccanica di un elemento in vetro nel tempo, quali la fatica statica e la concentrazione degli sforzi all'apice delle fessure. I valori numerici così ottenuti potranno poi essere tarati nel tempo mediante sistematiche prove di laboratorio, esperienze progettuali, simulazioni numeriche e calibrando opportunamente la scelta della  $P_f$ . Risulta infatti superfluo andare a ricercare con precisione il valore di parametri quali  $K_{cr}$ ,  $\nu_0$ ,  $n$ , se d'altra parte la non corretta valutazione della durata del carico o della disomogeneità del campo di sforzi porta ad errori di gran lunga maggiori.

Lo sviluppo degli esempi numerici raccolti pone in evidenza l'importanza ai fini della verifica, di stabilire una storia di carico significativa. Questo problema potrà essere risolto da un ente normatore che fornisca delle coppie di valori carico-tempo di applicazione  $t_0$  capaci di simulare verosimilmente il danno che verrà accumulato durante la vita utile dell'elemento strutturale. Questo è quanto già avviene nelle verifiche a fatica dei materiali metallici dove risulta necessario definire una storia di carico o il cosiddetto numero di cicli di una certa sollecitazione. Il tempo di applicazione equivalente  $t_0$ , da associare per esempio al carico massimo già previsto dalle attuali normative per le verifiche statiche classiche, potrebbe essere facilmente calcolato mediante l'espressione (5-1) applicata ad una storia di carico significativa, ad esempio quella che induca un danno maggiore del 95% di tutte le storie di carico registrate. Una procedura di questo tipo, seppur possa richiedere tempi lunghi per una corretta analisi statistica delle storie di carico, è caratterizzata da uno scarso onere computazionale vista la semplicità dell'espressione (5-1) ed in quanto implementabile in un qualsiasi foglio di calcolo elettronico. Medesime considerazioni valgono per la variabilità spaziale del campo di sforzi alla quale si potrebbe ovviare calcolando dei coefficienti riduttivi mediante la (5-2) per elementi con condizioni di vincolo e geometrie comunemente adottate quali elementi rettangolari appoggiati in modo continuo su 2, 3 o 4

lati, oppure appoggiati su 4 punti o su 6 punti, con lo scopo di semplificare la progettazione di elementi di normale importanza. Nulla vieterebbe tuttavia che, per particolari geometrie o per elementi di rilevante importanza, il progettista possa eseguire le verifiche utilizzando direttamente la (5-2) e la (5-1), definita una storia di carico significativa in accordo con la committenza.

In definitiva, il metodo di verifica proposto può essere definito di tipo semi-probabilistico e caratterizzato da una disuguaglianza critica molto simile a quella utilizzata per le verifiche degli altri materiali. E' dotato di una elevata controllabilità, poiché non richiede softwares appositamente sviluppati e consente di tenere conto della precompressione da temperatura ed esterna se si considerano esclusivamente le superfici decomprese o tese essendo le uniche che realmente contribuiscono all'incremento della  $P_f$ . La regolarità e stabilità della soluzione al variare dei parametri influenti conferisce solidità ai risultati numerici.

Mantiene una generale validità di applicazione al variare della geometria dell'elemento, delle condizioni ambientali, dei vincoli, delle sollecitazioni e presollecitazione.

Risulta allineato con la filosofia degli *Eurocodici* in quanto la probabilità di fallimento viene fissata come parametro, in base al grado di sicurezza che si vuole garantire.

## Bibliografia

- [1]. Haldimann, M. Fracture Strength of Structural Glass Elements - Analytical and Numerical Modelling, Testing and Design. *Thèse EPFL No 3671*, Lausanne: Ecole Polytechnique Fédérale, 2006.
- [2]. Irwin, G.R. Fracture. In *Handbuch der Physik*, p.551, Vol 6. Berlin: Springer-Verlag, 1957.
- [3]. S.E.D. Structural Engineering Document: Structural Use of Glass. Edited by M. Haldimann, A. Luble and M. Overend. *International Association for Bridge and Structural Engineering*, 2008.
- [4]. Santarsiero, M. Proposta per un nuovo Metodo di Verifica della Sicurezza delle Strutture in Vetro. *Tesi di Laurea*. Pisa: Università di Pisa - Facoltà di Ingegneria, 2009.
- [5]. Brown, W. A Load Duration Theory for Glass Design. *Publication of National Research Council of Canada*, Division of Building Research, NRCC 12354, p. 515-524. Ottawa, Ontario, Canada, 1972.
- [6]. Charles, R., & Hilling, W. Architectural Glazing: Design Standards and Failure Models. *Building and Environment*, Vol 30, No. 1, pp. 29-40, 1995.

- [7]. Weibull, W. A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. *Journal of Applied Mechanics*, 18:293-297, September 1951.
- [8]. Evans, A. G., & Wiederhorn, S. Proof testing of ceramic materials - analytical basis for failure prediction. *International Journal of Fracture*, 10(3), pp. 379-392, 1974.
- [9]. Beason, W. L. and Morgan, J.R. Glass Failure Prediction Model. *Journal of Structural Engineering*, 110(2): pp. 197-212, 1984.
- [10]. Fischer, A., & Collins, R. Architectural Glazing: Design Standard and Failure Models. *Building and Environment* (30), pp.29-40, 1995.
- [11]. Sedlacek, G., Blank, K., Laufs, W., & Güsgen, J. Glas im Konstruktiven Ingenieurbau. Berlin: Ernst & Sohn, 1999. ISBN 3-433-01745-X.
- [12]. Shen, X. Entwicklung eines Bemessungs - und Sicherheitskonzeptes für den Glasbau. *Ph.D. Thesis*, Darmstadt: Technische Hochschule Darmstadt, 1997.
- [13]. Siebert, G. Beitrag zum Einsatz von Glas als tragendes Bauteil im konstruktiven Ingenieurbau. *Ph.D. Thesis*, Technische Universität München, (TUM), 1999.
- [14]. Devigili, M. Dimensionamento ed Affidabilità delle Strutture in Vetro. *Tesi di Laurea*. Pisa: Università di Pisa - Facoltà di Ingegneria, 2006.
- [15]. EN-1288-2. Glass in Building - Determination of the the bending strength of glass – Part 2: *Coaxial double ring test on flat specimens with large test surface areas*. CEN, 2000.
- [16]. EN-1288-5. Glass in Building - Determination of the the bending strength of glass - Part 5: *Coaxial double ring test on flat specimens with small test surface areas*. CEN, 2000.
- [17]. Porter, M. Aspects of Structural Design with Glass. *Ph.D. Thesis*, University of Oxford, 2001.

#### **Autori**

*Maurizio Froli, Manuel Santarsiero*  
Dipartimento di Ingegneria Civile, sede di Strutture.  
Università di Pisa.  
([www.mauriziofroli.it](http://www.mauriziofroli.it))  
([manuel.santarsiero@gmail.com](mailto:manuel.santarsiero@gmail.com))